Методика расчета осесимметричного магнитного поля на нерегулярной сетке применительно к задачам магнитной гидродинамики

Гусева А. А.

Национальный исследовательский университет МЭИ (Московский энергетический институт)

Задача расчета магнитных полей в токонесущей среде является актуальной, в первую очередь, для электрометаллургии [1,2]. При моделировании электрометаллургического процесса (например, процесса сварки или переплава металла), чтобы получить информацию о распределении температур и доле расплавленного металла, необходимо одновременно решить задачи о распределении тепла, скорости и магнитного поля в объеме расплава, а также о динамике границы раздела фаз твердая область/расплав. В электродинамическом приближении можно считать, что магнитное поле (МП) вызывает движение электропроводной жидкости (расплавленного металла), и при этом движение жидкости не создает дополнительного (индуцированного) магнитного поля [3]. Таким образом, моделирование следует начинать с решения задачи о распределении магнитного поля. В настоящее время есть несколько подходов к расчету МП. Наиболее распространен подход, когда распределение МП получается непосредственным интегрированием уравнения Максвелла rot H=j. Однако при численном расчете этот метод ограничен необходимостью ориентировать стороны ячеек вдоль осей координат, то есть использовать регулярную сетку хотя бы по одному направлению, что может быть неприемлемо для решения остальных задач. Вариант регенерации, то есть аппроксимации регулярной сетки нерегулярной, в общем случае является нетривиальной геометрической задачей с числом операций, пропорциональным числу ячеек сетки. Также остается открытым вопрос о переносе значений на новую сетку с выполнением законов сохранения. Другим распространенным методом расчета МП является метод, основанный на решении уравнения Лапласа для векторного потенциала A и вычислении МП из выражения rot A=H. Однако при численной реализации этот метод требует нахождения разности производных от дискретно заданных функций, что ведет к существенной потере точности.

Мы предлагаем использовать метод расчета МП, основанный на законе Био-Савара-Лапласа. Радиальная и осевая компоненты плотности тока в объеме задаются аналитическим выражением или находится численно из решения уравнения Лапласа для электрического потенциала. Для каждой ячейки можно записать выражение для магнитной индукции в цилиндрических координатах, создаваемой в ней другой произвольной ячейкой. Для определения магнитного поля необходимо проинтегрировать это выражение по всем ячейкам сетки, то есть численно вычислить объемный интеграл. В осесимметричной конфигурации остается только угловая компонента магнитной индукции. Представим объемный интеграл как поверхностный от одномерного интеграла по углу phi. Одномерный интеграл является линейной комбинацией эллиптических интегралов Лежандра и не может быть выражен аналитически через элементарные функции, а так же не может быть вычислен с достаточной точностью при помощи квадратурных формул. Разложив подынтегральную функцию в ряд по степеням переменной phi, можно получить выражение для вычисления интеграла в виде полинома. Поверхностный интеграл считается суммированием произведений элементарной площади ячейки на значение одномерного интеграла в ячейке по всей расчетной области. Данный метод был протестирован на расчетных областях в форме круглого цилиндра, конуса и полусферы и показал хорошее совпадение с аналитическим решением при числе ячеек ~1000-3000. Достоинством этого метода является его независимость от формы ячеек и формы расчетной области. К недостаткам метода следует отнести квадратичную зависимости числа операций необходимых для вычисления МП от количества расчетных ячеек.

Найденное МП можно использовать при решении задач магнитной гидродинамики для определения объемной электромагнитной силы F=jxB, действующей в жидкой среде, в которой протекает электрический ток. Объемная электромагнитная сила F, вызывающая движение среды, в дальнейшем используется как источниковый член при решении уравнений Навье-Стокса.

1. Ячиков И.М., Карандаева О.И., Ларина Т.П., Портнова И.В. Моделирование электромагнитных процессов в электродуговых печах постоянного тока. Магнитогорск: МГТУ, 2005.
2. Смирнов С.А., Калаев В.В., Нехамин С.М., Крутянский М.М., Колгатин С.Н., Нехамин И.С. Математическое моделирование электромагнитного перемешивания жидкой стали в дуговой печи постоянного тока. // ТВТ. 2010. Т. 48, №1.
3. В. В. Бояревич, Я. Ж. Фрейберг, Е. И. Шилова, Э. В. Щербинин. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985.