Действенность аксиоматического метода в развитии математики

Бекмолдаева Р.Б., Дуйсебаева П.С., Джусупбекова Г.Т., Кыдырбекова А.С.

ЮКГУ им.М.О.Ауезов

Иногда считают аксиоматический метод только методом обоснования, но не методом развития содержания математики. Это мнение, как нам кажется, ошибочно.

Действенность аксиоматического метода можно подтвердить следующими примерами. Допустим, что и – две какие либо изоморфные интерпретации некоторой, заданно формально системы аксиом В. Каждая теорема, доказанная только с помощью В относительно объектов интерпретации , в тех же терминах, но с иным, в зависимости от явно выраженных элементов, содержанием, справедлива относительно соответственных объектов интерпретации , и обратно. Иначе говоря, доказываемые теоремы обладают всеобщностью, благодаря чему нет необходимости передоказывать их для объектов каждой интерпретации отдельно. Как уже доказывалось, характеризуемые системой аксиом Пеано множества количественных и порядковых чисел изоморфны, благодаря этому все теоремы, доказываемые с помощью этой системы аксиом, имеют силу как в области количественных, так и порядковых чисел. Проективное пространство может быть изоморфно отображено на самого себя с превращением точек в плоскости и обратно. Благодаря этому имеет место принцип двойственности, творческое значение которого хорошо знакомо всякому изучавшему проективную геометрию. Метод координат Декарта позволяет пространство Евклида изоморфно отобразить на область операций линейной алгебры, и это является объективной основой существования аналитической геометрии. Еще более сильные примеры использования изоморфизма дают современные алгебры и топология.

При аксиоматическом изучении объектов и отношений между ними существенную роль играет разработка регулярных методов – алгоритмов (как иногда говорят – конструктивных методов), позволяющих по определенным правилам решать вопросы, относящиеся к изучаемым объектам и отношениям. Так, в теории геометрических построений разрабатываются методы (метод подобия, метод симметрии и т. п.), которые позволяют выполнить построение (с помощью циркуля и линейки) фигур, в предположении разрешимости некоторых, принятых за исходные задач (деление отрезка на равные части, построение угла, равного данному, и т. п.). В теории уравнений разрабатывают методы нахождения корней уравнений и т.п. Каждая теория, как правило, разрабатывает свои, специфически характерные для изучаемых объектов и отношений алгоритмы. И вот сила современного аксиоматического метода состоит еще в том, что он позволяет переносить алгоритмы одной теории в другие теории и тем самым способствовать их развитию.

Если из непротиворечивой системы аксиом исключить, а потом добавить некоторые новые аксиомы, то полученные системы аксиом, в случае их непротиворечивости, определяют новые теории, изучение которых очень часто освещает с новой стороны положения исходной теории. Таким путем, например, были созданы гиперболическая (Гаусс, Бойяи и Лобачевский) и не архимедова (Гильберт) геометрии, изучение которых позволило исчерпывающим образом выяснить значение аксиом параллельности и Архимеда в самой геометрии Евклида. Если непротиворечивая система A содержит n взаимно независимых аксиом, то все теоремы, которые можно доказать с помощью n-k этих аксиом, справедливы во всякой теории, содержащей эти n-k аксиом. Так, когда Гильберт показал, что для обоснования учения о площадях нет необходимости привлекать аксиому Архимеда, тем самым было доказано, что учение о площадях одинаково как для Евклидовой, так и для не архимедовой геометрии. Если непротиворечивые системы А и В содержат по n-1 одинаковых аксиом, а их n аксиомы противоположны, то и доказанные в А и В с n-ми аксиомами теоремы будут противоположны. В познавательном отношении это весьма важный факт. Зная, что теорема о сумме углов треугольника, утверждение существования подобных треугольников и т. п. эквивалентны аксиоме параллельных, и зная, что гиперболическая геометрия отливается от Евклидовой только аксиомой о параллельных, мы сразу может сказать, что в гиперболическом пространстве нет подобных фигур и что сумма углов треугольника не равна 2π.

1.Вейль Герман. Математическое мышление. Пер. с нем. – М.: Наука, 1989.